



Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Capital Uman 2014-2020

Axa prioritară 6: *Educație și competențe*

Prioritatea de investiții 10.i: *Reducerea și prevenirea abandonului școlar timpuriu și promovarea accesului egal la învățământul preșcolar, primar și secundar de calitate, inclusiv la parcursuri de învățare formale, nonformale și informale pentru reintegrarea în educație și formare*

Obiectivul specific 6.4: *Creșterea numărului de tineri care au abandonat școala și de adulți care nu și-au finalizat educația obligatorie care se reîntorc în sistemul de educație și formare, inclusiv prin programe de tip a doua șansă și programe de formare profesională*

Obiectivul specific 6.6: *Îmbunătățirea competențelor personalului didactic din învățământul preuniversitar în vederea promovării unor servicii educaționale de calitate orientate pe nevoile elevilor și a unei școli inclusive*

Titlu proiect: *“Acces la programe de educație și formare profesională pentru tinerii și adulții din județul Dolj care au părăsit timpuriu școala (II)”*

Cod SMIS 2014+: 135712

MATERIALE DE PREDARE DISCIPLINA matematica

Modulul II FORME

Unitatea de învățare: Puncte, drepte și figuri geometrice

Program „A doua șansă” pentru învățământ secundar inferior

Versiunea finală

A.3.1 Organizarea, monitorizarea și evaluarea programului „A doua șansă” și a stagiilor de pregătire practică de 720 de ore

**Nume prenume: Ungureanu Cristina
Expert curriculum matematica**

Octombrie 2022

Conținutul acestui material nu reprezintă în mod obligatoriu poziția oficială a Uniunii Europene sau a Guvernului României

MODULUL II : FORME

Unitatea de învățare: Puncte, drepte și figuri geometrice

De ce este necesar să studiem?

Avem în jurul nostru există o serie de lucruri pe care le considerăm punctiforme: vârful unui pix, vârful unui ac, urma pe care o lasă un vârf de creion bine ascuțit pe hârtie. Uneori, obiectele punctiforme pot fi atât de mici, încât ochiul omenesc nu le mai vede. Nu avem cum să percepem cu ochiul liber o bacterie, un atom, pixelii care alcătuiesc o fotografie bună.

Punctul geometric este imaginat astfel încât să nu aibă nici o dimensiune.

Punctul, dreapta și planul sunt cele mai simple noțiuni ale geometriei, noțiuni abstracte create de mintea omului. Ele nu au definiție, dar pentru înțelegere le descriem.

Punctul este asemănat cu urma lăsată pe o foaie de hârtie de vârful unui creion foarte bine ascuțit.

• *A* citim " punctul A" x*B* " punctul B"

Se notează cu litere mari de tipar din alfabetul roman: A, B, C, ...

Cum punctele nu au dimensiune nu pot să fie comparate.

Daca punctele A si B coincid, scriem $A = B$ iar daca sunt diferite , scriem $C \neq D$.

A • • C • D
B

Dreapta este asemănată cu un fir de ață foarte subțire și foarte bine întins considerat prelungit la ambele capete oricât de mult dorim.

Dreapta este un concept geometric care împreună cu **punctul** formează bazele geometriei plane și în spațiu.

Orice dreaptă conține o infinitate de puncte..

Axioma lui Euclid: Prin două puncte distincte putem trasa o singură dreaptă. De aceea spunem că două puncte distincte din plan **determină** o dreaptă.

Folosită standard, dreapta reprezintă drumul cel mai scurt dintre două puncte.

Dreapta se poate desena pe hârtie cu ajutorul riglei. Desenul unei drepte nu este totuna cu ideea de dreaptă.

În reprezentările noastre desenate apar doar bucăți de dreaptă. Dreapta întregă este gândită ca având lungime infinită Dreapta nu are grosime și este nesfârșită la ambele capete.



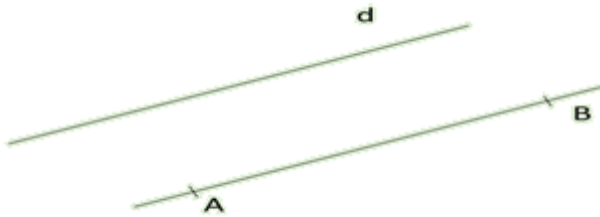
UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Notăm dreapta cu o literă mică din alfabet sau cu două litere mari ce reprezintă două puncte aflate pe dreaptă.

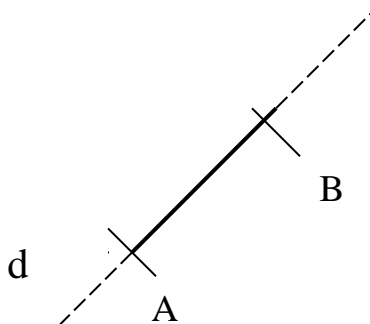
Citim : "dreapta d" sau "dreapta AB".



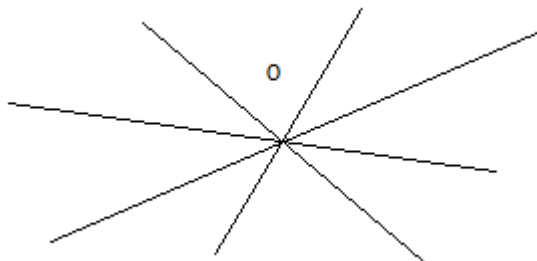
Două puncte **A** și **B** determină o **dreaptă** notată cu **AB**. Punctele situate pe aceeași dreaptă se numesc **coliniare**.

Punctele A și B sunt situate pe dreapta d, vom spune ca aceste puncte aparțin dreptei d.

Vom scrie: $A \in d$; $B \in d$



Printr-un punct putem duce oricât de multe drepte.

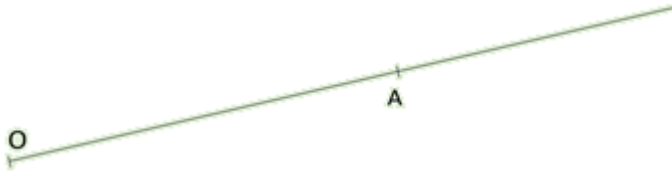


Puncte coliniare : Trei (sau mai multe) puncte sunt coliniare, dacă există o dreaptă care să conțină cele trei puncte.

Semidreapta este o porțiune dintr-o dreaptă limitată doar la un capăt. Capătul în care dreapta este limitată se numește originea semidreptei. Se notează $[Oa$ sau $(Oa$

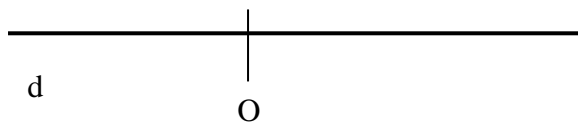


O semidreaptă se mai poate nota folosind originea și un punct de pe acea semidreaptă. Iată de exemplu cum putem desena semidreapta $[OA$.



Un exemplu din realitate care are asemănări cu o semidreaptă este o rază LASER. Ea pornește de la sursă și continuă la nesfârșit.

Punctul O împarte dreapta d în două părți, părți numite **semidrepte**: $[OA$ și $[OB$, numite și semidrepte opuse



Segmentul de dreaptă este o porțiune dintr-o dreaptă limitată la ambele capete.

Segmentul de dreaptă este cuprins între două puncte aflate pe dreapta suport.

Spunem că segmentul de dreaptă este mărginit.

Aceste puncte se numesc extremitățile sau capetele segmentului.



Un segment se notează prin punctele care-i definesc capetele.

Segmentul AB se află pe dreapta suport d .

Un **segment de dreapta**, este partea unei drepte notate AB , determinată de punctele situate între A și B . Între cele două puncte există o infinitate de alte puncte.

Un **segment de dreapta** determinat de punctele A și B care conține numai punctul A se notează $[AB)$.



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Un **segment de dreapta** determinat de punctele **A** și **B** care conține numai punctul **B** se notează **[AB]**.

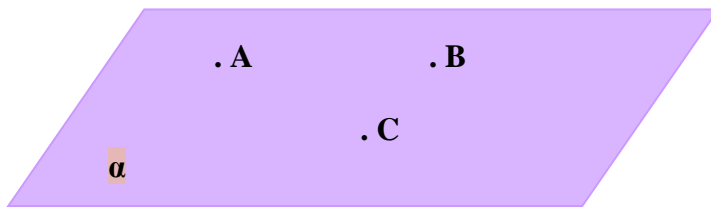
Un **segment de dreapta** determinat de punctele **A** și **B** care conține atât punctul **A** cât și punctul **B** se notează **[AB]**.

Planul este asemănat cu suprafața unei ape liniștite, considerată nemărginită în toate părțile.

La desenarea figurilor, planul se poate reprezenta printr-un paralelogram.

De obicei se notează cu litere mici din alfabetul grec α , β , π etc., sau cu trei litere mari puse în paranteză rotundă (ABC), unde A,B,C sunt trei puncte necoliniare oarecare ale acestui plan.

Planul este o mulțime infinită de puncte, nu are grosime.



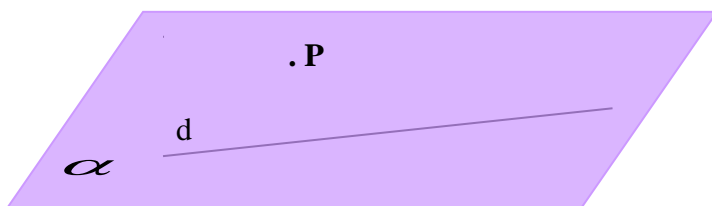
Suprafața liniștită a unui lac reprezintă o parte dintr-un plan foaia de caiet, un perete, fața unei mese sunt părți (măsurabile) din diferitele plane

Pozițiile relative ale unui punct față de un plan

Față de un plan, un punct poate fi interior (aparține planului), respectiv exterior (nu aparține planului).

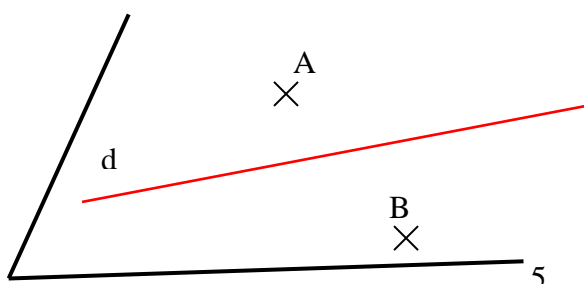
Punctul **P** se află în planul α și se scrie $P \in \alpha$ adică "P aparține lui α "

Dreapta **d** se află în plan și se notează $d \subset \alpha$, adică "dreapta d este inclusă în planul α "



O dreapta **d** inclusă în planul α , împarte planul în două părți, părți numite **semiplane**.

Cele două semiplane sunt : $\llbracket dA$ și $\llbracket dB$



APLICAȚII

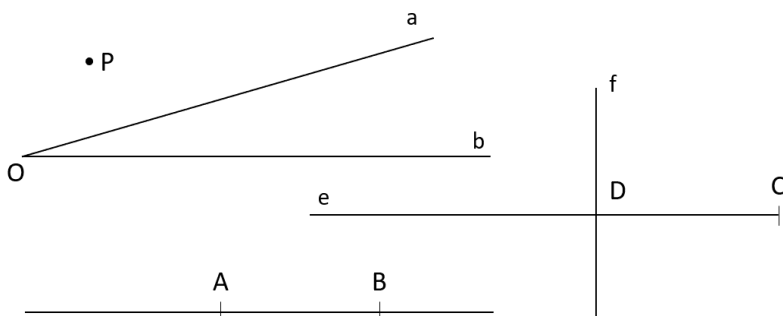
1. Desenați punctele A și B știind că $A \neq B$.
2. Desenați punctele A, B și C știind că $A = B$ și $B \neq C$.
3. Desenați două puncte distinct E și F, apoi dreapta determinată de cele două puncte și notați-o corespunzător.
4. Desenați o dreaptă d și două puncte distincte A și B astfel încât:
 - a) punctele A și B aparțin dreptei d.
 - b) doar punctul A aparține dreptei d.
 - c) doar punctul B aparține dreptei d
5. Fie punctele **M**, **N**, **P** necoliniare din figura următoare:
 - a) Câte drepte pot să determine punctele respective.
 - b) Desenează dreptele determinate de punctele M, N, P.

•M

P
•

•N

6. Desenează punctele A, B, C coliniare.



7. Analizând desenele de mai sus, scrie:
 - a) punctele care apar în figurile respective;
 - b) dreptele care apar în figurile respective;
 - c) semidreptele care apar în figurile respective.



8. a) Desenează punctele coliniare A, B, C, D.

b) Scrie cel puțin cinci moduri de a denumi dreapta căreia îi aparțin cele 4 puncte.

9. a) Desenează punctele M, N, P, R știind că oricare 3 dintre ele sunt necoliniare.

b) Desenează și scrie dreptele determinate de punctele respective.

10. a) Desenează trei puncte coliniare **A, B, C** și punctul **D** \notin **AB**.

b) Desenează și scrie dreptele determinate de punctele respective.

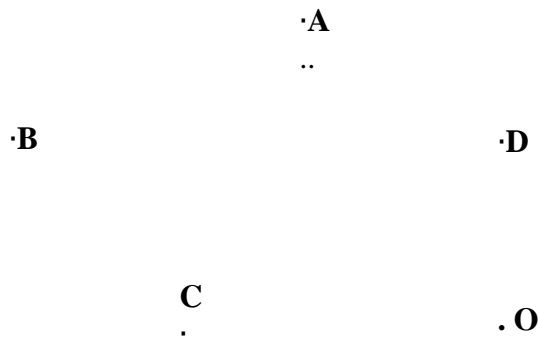
11. Fie punctele distincte **A** și **B** care aparțin dreptei **d**.

Câte semidrepte determină punctele respective pe dreapta **d**. Notează și scrie semidreptele respective.

12. Fie punctele A, B, C, D și O distincte din figura de mai jos:

a) Trasează semidreptele [OA, [OB, [OC, [OD.

b) Schimbă poziția punctului O pentru a obține două perechi de semidrepte opuse.

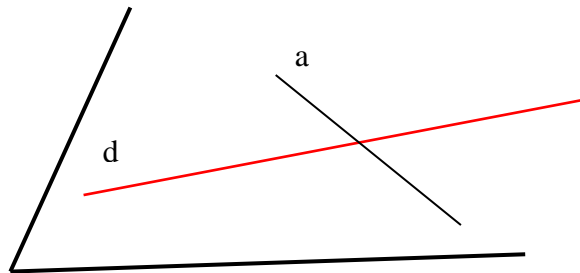


13. Fie punctele A, B, C, D coliniare situate în această ordine pe o dreaptă d.

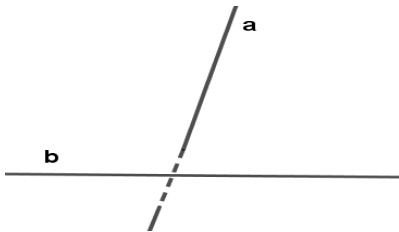
Scrie toate segmentele determinate de punctele respective.

POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ DREPTE

Două sau mai multe drepte situate în același plan se numesc drepte *coplanare*.

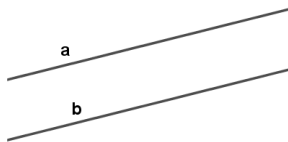


Două drepte pentru care nu există un plan care să le includă pe amândouă se numesc drepte *necoplanare*.



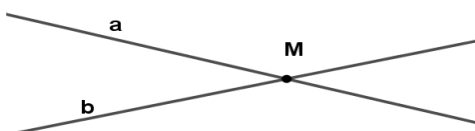
Dreptele coplanare pot să fie :

- paralele - sunt dreptele situate în același plan care nu au nici un punct comun.



$$a \parallel b, a \cap b = \emptyset$$

- concurrente - sunt dreptele situate în același plan care au un punct comun.



$$a \cap b = \{M\}$$

- identice (confundate)- drepte care coincid (au două puncte comune).



Privind în jurul nostru observăm se află peste tot lini curbe și lini frânte.

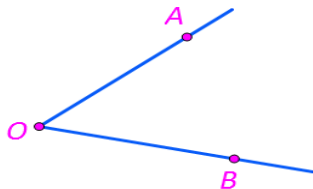
Noțiunea de figură are multe aplicații în lumea reală, însă atunci când vine vorba despre figură geometrică ne referim la formele obiectelor care ne înconjoară în viața de zi cu zi.

Figurile geometrice se află peste tot în jurul nostru, acestea fiind lini frânte și lini curbe.

În același timp, figurile geometrice sunt mulțimi nevide de puncte, iar cele mai populare sunt triunghiul, pătratul, dreptunghiul, și cercul.

În cele ce urmează vom vorbi pe rând despre fiecare dintre acestea.

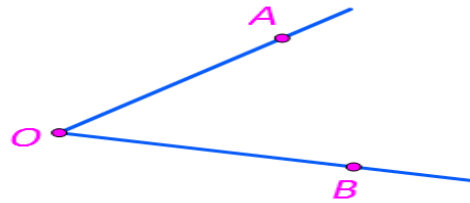
Unghiul este o figura geometrică formată de două semidrepte cu aceeași origine.



Pentru a măsura unghiurile, există un dispozitiv numit raportor. Unitatea de măsură a unghiului este **grad**. Trebuie remarcat faptul că fiecare unghi are o anumită măsură de grad, care este mai mare decât zero.

Un unghi cu măsura de 90 de grade se numește *unghi drept*, iar clasificarea unghiurilor se face prin compararea lor cu acest unghi. Astfel, în funcție de măsura lor, unghiurile pot fi:

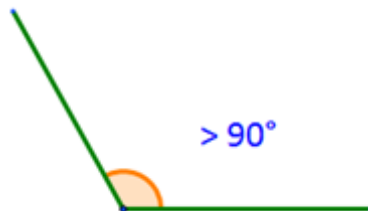
- unghiul ascuțit - are măsura mai mică de 90°



- unghiul drept - cu măsura egală cu 90°



- unghi obtuz - cu măsura mai mare de 90° .



- unghiul ce are laturile două semidrepte opuse se numește *unghi alungit*, iar un astfel de unghi are măsura egală cu 180 de grade.



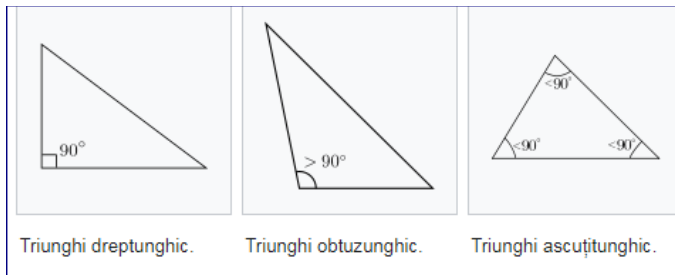
O *linie poligonală* este o linie frântă închisă, o reuniune de segmente care nu sunt unul în prelungirea celuiilalt.

Poligonul este o figură geometrică plană, închisă, formată dintr-un număr finit de segmente, numite laturi.

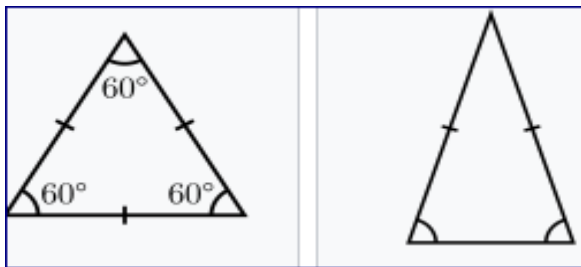
Triunghiul este o linie poligonală, care are trei laturi drepte și trei vârfuri.

Triunghiul este figura geometrică dată de reuniunea segmentelor închise determinate de trei puncte distincte necoliniare

Triunghiurile poartă diverse denumiri în funcție de tipul de unghiuri. Spre exemplu, dacă un triunghi are un unghi drept, acesta se numește triunghi dreptunghic. Dacă toate unghiurile sunt mai mici de 90° , triunghiul este ascuțitunghic, iar dacă unul dintre unghiuri are mai mult de 90° se numește obtuzunghic.



Mai există triunghiul echilateral, care are toate laturile egale și triunghiul isoscel care are două laturi de lungimi egale.

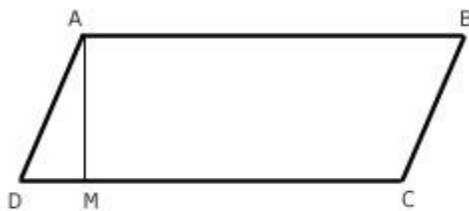


Patrulaterul este un poligon cu patru laturi. Un patrulater se numește convex, dacă prelungind orice latură a sa, toate celelalte laturi sunt situate de aceeași parte a ei.

Exemple obiecte din viața reală care arată ca un triunghi: felii de pizza, prăjituri "trigoane".

Paralelogramul este patrulaterul convex care are laturile opuse paralele.

Paralelogramul are laturile opuse și congruente.



Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept.

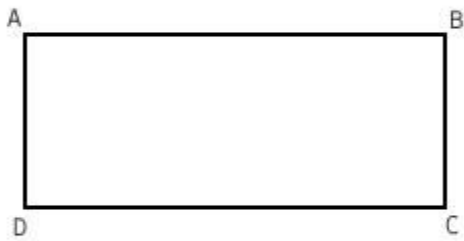


UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

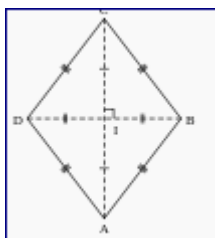
Un dreptunghi este un poligon cu patru laturi, patru colțuri și patru unghiuri drepte. Este obținut prin unirea a patru segmente. Fiind un paralelogram are laturi opuse două câte două paralele și de lungimi egale. Fiecare unghi al dreptunghiului are 90° , iar cele două diagonale sunt egale și se intersectează în mijlocul dreptunghiului.



Exemple obiecte din viața reală care arată ca un dreptunghi: carte, tablă, masă

Rombul este paralelogramul cu două laturi alăturate congruente.

Laturile rombului sunt de lungimi egale. Diagonalele formează unghiuri drepte și se înjumătățesc.

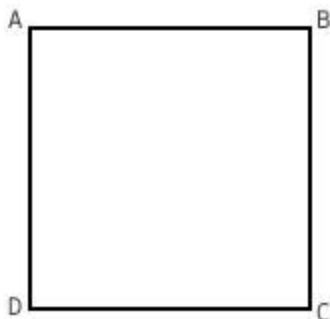


Exemple obiecte din viața reală care arată ca un romb: zmeu, prăjitură.

Pătratul este rombul cu un unghi drept.

Un pătrat are laturile sunt lungimi egale și se reunesc pentru a forma patru unghiuri drepte.

De asemenea, laturile opuse ale unui pătrat sunt paralele. Diagonalele unui pătrat se intersectează formând tot un unghi drept.





UNIUNEA EUROPEANĂ

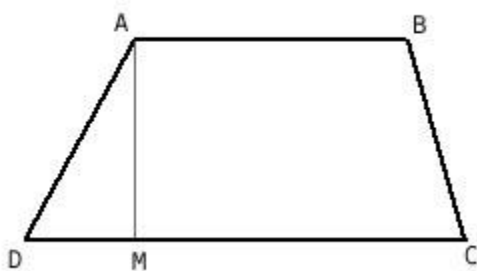


Instrumente Structurale
2014-2020

Exemple obiecte din viața reală care arată ca un pătrat: masă, placă de gresie, șervețelul din hârtie neîmpăturit tabla de șah .

Trapezul este patrulaterul convex cu două laturi paralele și două laturi neparalele.

Cele două laturi paralele ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) se numesc baze – $AB = B = \text{baza mare}$ și $CD = b = \text{baza mică}$.

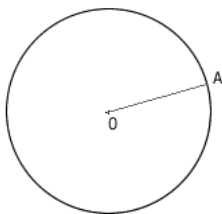


Trapezul este de trei tipuri: oarecare, isoscel și dreptunghic.

Trapezul isoscel are laturile neparalele congruente, iar trapezul dreptunghic are una dintre laturile neparalele perpendiculară pe cele două baze.

Linia curbată este una dintre cele mai de bază și importante forme de matematică, în jurul căreia se stabilesc o multitudine de structuri și relații de mare importanță. Am putea descrie linia curbată ca o linie dreaptă care ia un fel de deviație în linie dreaptă.

Liniiile curbate închise pot forma diferite suprafețe: cercul, elipsa.



Cercul este o formă bidimensională, care are doar o latură curbată și în care nu se găsesc unghiuri.

Fiecare cerc are un centru, care se află (ai ghicit!) în centrul cercului. În această figură geometrică, toate punctele de pe circumferință sunt situate la aceeași distanță de centru.

Exemple obiecte din viața reală care arată ca un cerc: o monedă; roata unei biciclete sau a unei mașini ceasul .



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

În geometrie, un poliedru este o formă tridimensională formată din fețe poligonale plane, care se întâlnesc în muchii (laturi în geometria multidimensională), care la rândul lor se întâlnesc în vârfuri.

Corpurile geometrice care au fețe poligonale, muchii și vârfuri se numesc poliedre.

Piramida regulată are baza un poligon regulat și fețele laterale triunghiuri isoscele

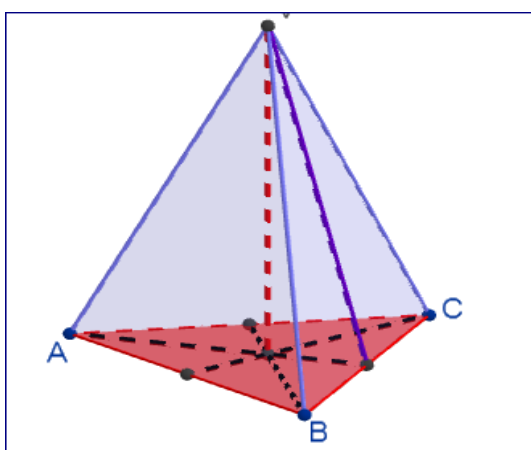
Pot fi mai multe tipuri de piramide după natura bazei:

- triunghiulară, cu baza triunghi
- patrulateră, cu baza patrulater
- pentagonală, cu baza pentagon
- hexagonală, cu baza hexagon

Tetraedrul este un poliedru alcătuit din patru fețe triunghiulare, oricare trei dintre ele intersectându-se într-unul din cele patru vârfuri.

Tetraedrul este cel mai simplu tip de piramidă, la care baza este un triunghi, de aceea mai este denumit și *piramidă triunghiulară*.

Un caz particular îl constituie tetraedrul regulat, la care toate fețele sunt triunghiuri echilaterale și este unul din cele cinci tipuri de poliedre regulate.



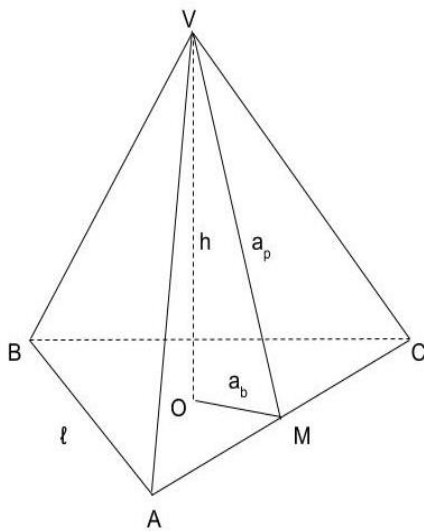


UNIUNEA EUROPEANĂ

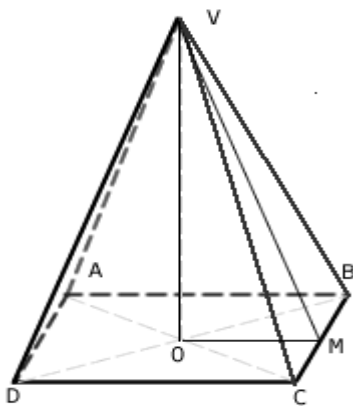


Instrumente Structurale
2014-2020

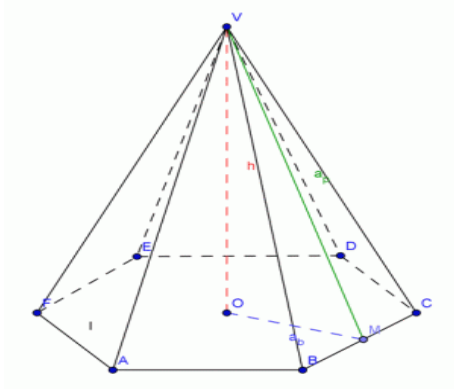
Piramida triunghiulară regulată



Piramida patrulateră regulată



Piramida hexagonală regulată



Prisma este un corp limitat de o suprafață prismatică și două plane paralele, care taie generatoarele ei. Suprafața prismatică determină pe cele două plane paralele, două poligoane numite „bazele” prisme. Fețele prismei deosebite (diferite) de baze se numesc „fețe laterale” ale prismei.

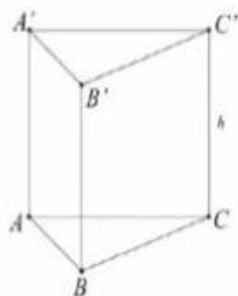
Segmentele după care se taie câte două fețe laterale ale prismei se numesc „muchiile laterale” ale prismei.

Când muchiile laterale ale prismei sunt perpendiculare pe planul bazei, prisma se numește „dreaptă”. Distanța între bazele prismei este „înălțimea” prismei. La prisma dreaptă muchia laterală este egală cu înălțimea.

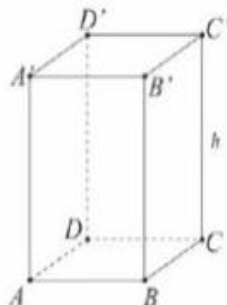
O prismă dreaptă care are baza un poligon regulat se numește „prismă regulată”.

PRISMA REGULATĂ

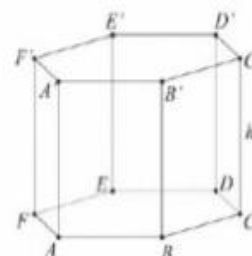
TRIUNGHILARĂ



PATRULATERĂ



HEXAGONALĂ





UNIUNEA EUROPEANĂ



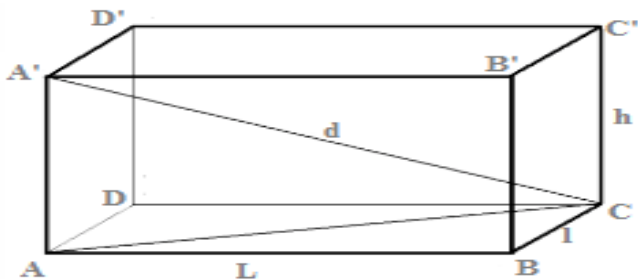
Instrumente Structurale
2014-2020

Paralelipipedul dreptunghic

Paralelipipedul dreptunghic are șase fețe dreptunghiuri, opt vârfuri și 12 muchii.

Un **paralelipiped** dreptunghic este o figură geometrică tridimensională formată din șase dreptunghiuri ce aparțin unor trei perechi de plane paralele.

- fețele opuse sunt paralele;
- fețele sunt dreptunghiuri;
- cele 12 laturi sunt congruente în serii de câte patru.

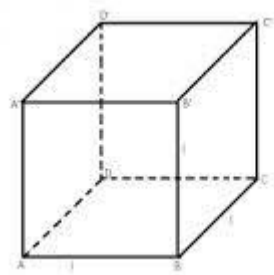


Cubul

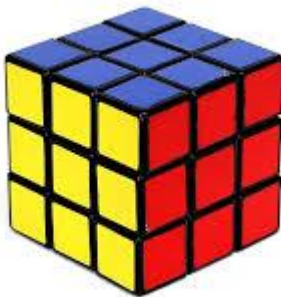
Cubul are șase fețe, toate pătrate congruente, așa cum este și zarul, opt vârfuri și 12 muchii.

Un cub este un corp geometric care are din punct de vedere constructiv:

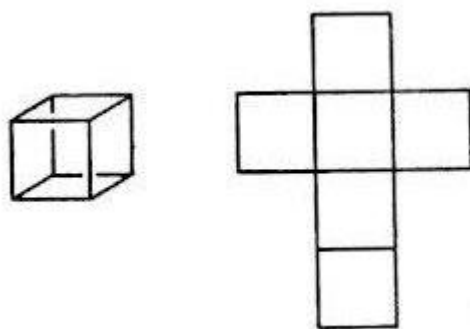
- 6 fețe pătratice congruente;
- 12 muchii de lungime egală;
- 8 vârfuri (colțuri), în care se întâlnesc câte 3 fețe și trei muchii adiacente.



Exemplu:

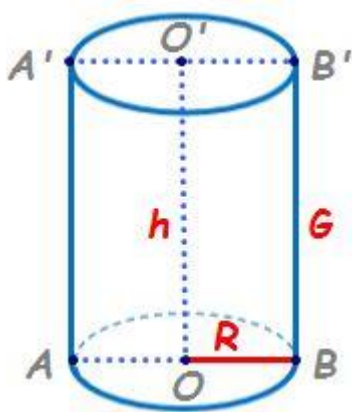


Desfășurare:



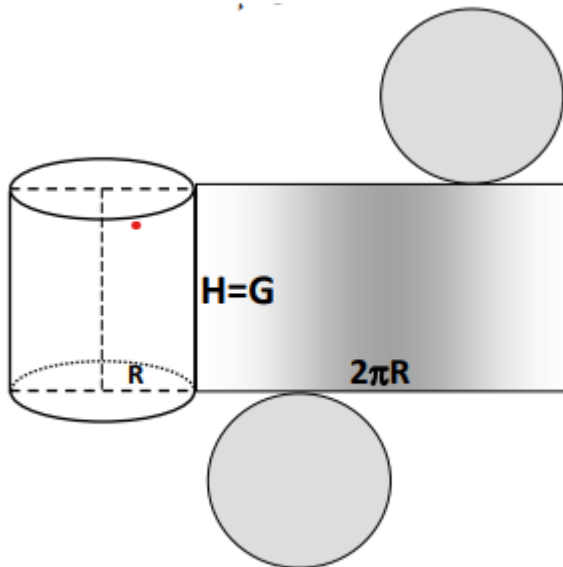
Cilindrul

Cilindrul este un corp de rotație (se poate obține prin rotirea unui dreptunghi în jurul unei laturi). Secțiunea axială este un dreptunghi $ABB'A'$ de dimensiuni $2R$ și G .



Cilindrul se poate desfășura într-un plan..

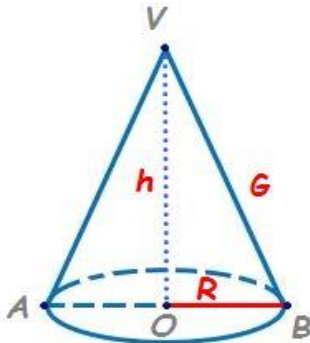
Această suprafață se poate desfășura sau desfășura într-un dreptunghi. Luați și voi o foaie de hârtie dreptunghiulară și modelați-o astfel pe latura lungă sau astfel, pe latura scurtă, veți obține un cilindru.



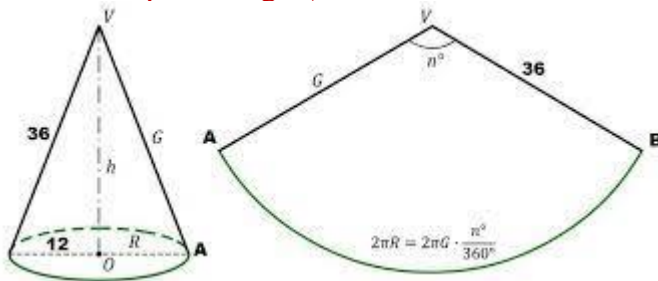
Conul

Conul este corpul obținut prin rotația completă a unui triunghi dreptunghic în jurul unei catete. Baza conului circular drept este un cerc.

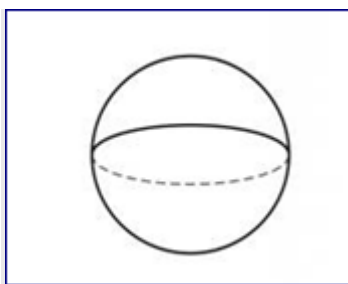
Conul este un corp geometric care are la bază un cerc, dar spre deosebire de cilindru, în partea cealaltă are doar un singur punct, un vârf.



Exemplu: Un cornet pentru înghețată



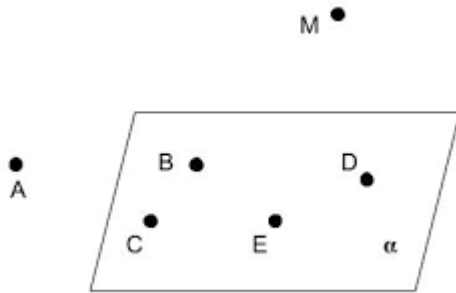
Sfera este mulțimea punctelor din spațiu egal depărtate de un punct dat, denumit centrul sferei.



Globul pământesc este aproximativ o sferă.

Pe globul pământesc există doi poli, după cum știți, Polul Nord și Polul Sud, care se află diametral opus pe suprafața sferei, iar globul pământesc mai are și un Ecuator, care se află la distanță egală între poli pe un plan perpendicular pe axa ce unește acești doi poli.

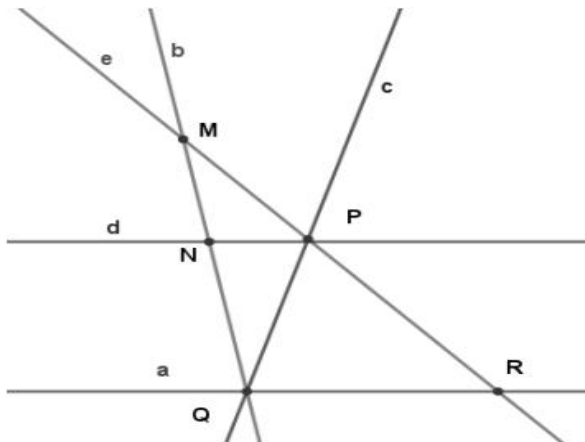
APLICATII



1. Analizează figura de mai sus și precizează:

- 6 drepte incluse în planul α
- 4 drepte care înțepă planul α

2. Se consideră figura alăturată:



- a) Scrie trei perechi de drepte concurente;
- b) Scrie două perechi de drepte confundate;
- c) Scrie o pereche de drepte paralele;
- d) Scrie două triplete de puncte coplanare;
- e) Scrie două triplete de puncte necoplanare.

3. Pe o dreapta consideram punctele A, B și C în această ordine.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



- a) unghiul ABC este nul;
- b) unghiul ACB este nul ;
- c) unghiul CBA este alungit ;
- d) unghiul BAC este alungit ;
- e) unghiul CAB este nul;
- f) unghiul ABC este alungit .

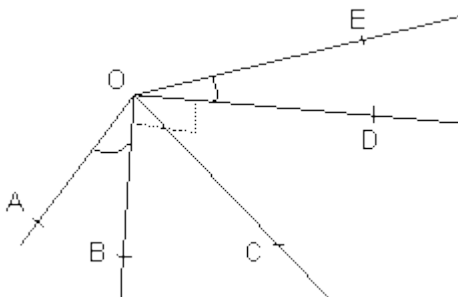
4. Precizați tipul unghiului A, știind că are măsura de:

- a) 120° ;
- b) 40° ;
- c) 90° ;
- d) 0° ;
- e) 100° ;
- f) 180° ;

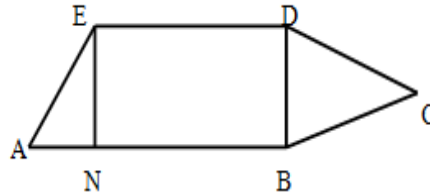
5. Precizați dacă unghiurile A și B sunt congruente știind că măsura unghiului A este de 30° iar măsura unghiului B este $\frac{1}{3}$ din măsura unui unghi drept.

6. Pentru figura alăturată scrie folosind notația cu trei litere:

- a) unghiul drept;
- b) unghiurile obtuze;
- c) unghiurile ascuțite.

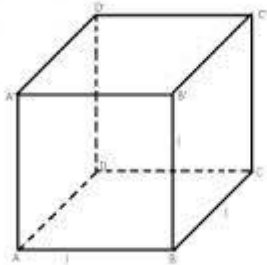


7. Analizând figura alăturată , precizează:



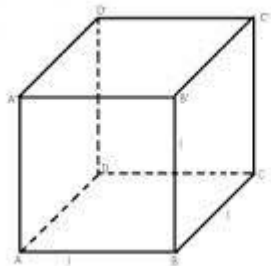
- Triunghiurile care apar în figură;
- Dreptunghiul care apare în figură;
- Trapezul care apare în figură;
- Pentagonul care apare în figură.

8. Fie o cutie în formă de cubul $ABCD A'B'C'D'$, ca în figura de mai jos:



- Scrive muchiile cubului concurente în punctul A.
- Scrive muchiile cubului paralele cu BC.
- Scrive muchiile cubului paralele cu AA' .
- Scrive muchiile cubului necoplanare cu AB.
- Scrive muchiile cubului paralele necoplanare cu AA' .

9. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, stabiliți poziția relativă a dreptelor:

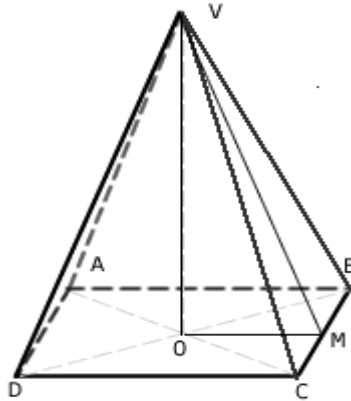


- AC și $A'C'$;
- AD și $B'C'$;
- AB și DD' ;

d) AB și $C'D'$;

e) AB și BB' ;

10. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ dați exemple de:



a) drepte concurente;

b) drepte paralele;

c) drepte necoplanare.

d) scrie care sunt fețele laterale ale piramidei;

e) scrie care sunt muchiile bazei piramidei;

11. a) Desenează un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$;

b) Scrie trei perechi de drepte concurente;

c) Scrie trei perechi de drepte paralele;

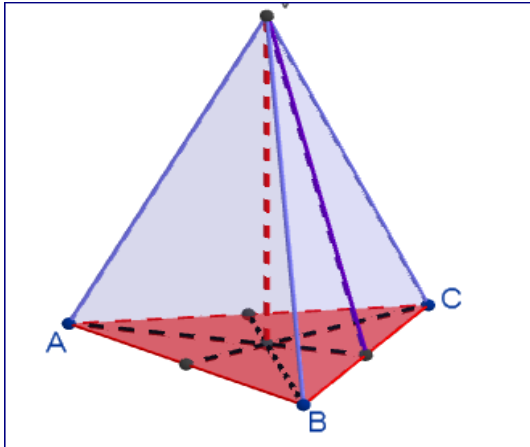
d) Scrie trei perechi de drepte necoplanare;

12. a) Desenează un tetraedru $ABCD$;

b) Scrie trei perechi de drepte coplanare;

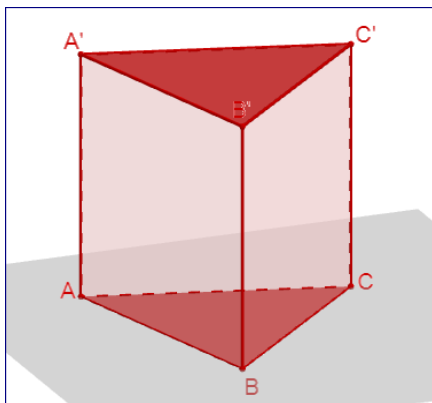
c) Scrie trei perechi de drepte necoplanare;

13. Pentru tetraedrul din figura alăturată:



- Scrie care sunt vârfurile tetraedrului;
- Scrie care sunt muchiile laterale ale tetraedrului;
- Scrie care este baza tetraedrului.

14. Pentru prisma din figura de mai jos:



- Scrie care sunt vârfurile prisme;
- Scrie care sunt muchiile laterale ale prisme;
- Scrie care sunt bazele prisme.
- Scrie care sunt fețele laterale ale prisme.